Eine moderne Methode zur Optimierung schallabsorbierender Materialien

Jörn Hübelt, Emad Elsaghir
Technische Universität Dresden,
Institut für Akustik und Sprachkommunikation,
01062 Dresden

Cris Kostmann
Fraunhofer-Institut für Fertigungstechnik und Angewandte Materialforschung,
Teilinstitut Dresden,
Winterbergstraße 28, 01277 Dresden

Zur Vorhersage der akustischen Eigenschaften metallischer Hohlkugelstrukturen sind Absorbermodelle weiterentwickelt worden, deren Eingangswerte die sogenannten Absorberparameter, z.B. Strömungswiderstand, Porosität, Tortuosität, bilden. Als Ergebnis der Modellierung werden die Absorberkennwerte, die komplexe Wellenzahl und der komplexe Wellenwiderstand, vorhergesagt. Mit Hilfe dieses Kennwertpaares sind die akustische Eigenschaften der Struktur eindeutig beschreibbar. Zur Überprüfung der Modellvorhersagen und zur Optimierung der Absorberstruktur wurde ein Verfahren entwickelt, das die Bestimmung der Kennwertpaare im Labor ermöglicht. Anhand der Messergebnisse können darüberhinaus auf sehr einfachen Wege Aussagen zur akustischen Wirksamkeit einer porösen Struktur getroffen werden.

I. EINLEITUNG

Zur Quantifizierung des Absorptionsvermögens von Schallabsorbern existieren verschiedene genormte Messmethoden, z.B Messung im „Kundtschen Rohr“ oder im Hallraum. Grundnachteil dieser Messverfahren ist, dass deren Ergebnisse nur für den während der Messung vorgefunden Absorberaufbau gültig sind. Befindet sich zum Beispiel ein Absorber mit der Dicke d vor einer schallharten Wand, können die Ergebnisse dieser Messung nicht zur Vorhersage des Absorptionsvermögens eines Absorbers mit doppelter Dicke d oder mit verändertem Wandabstand herangezogen werden.

Zur optimalen Konfektionierung eines porösen Absorbers ist jedoch in den meisten Fällen eine Variantendiskussion erforderlich. Mit Hilfe bereits existierender Absorbermodelle [1] kann eine Optimierung des porösen Absorbers zwar durchgeführt werden. Sie gestalten sich jedoch teilweise sehr aufwendig, da mehrere Eingangswerte, im folgenden als Absorberparameter bezeichnet, zuvor durch Messung bestimmt werden müssen. Mit Hilfe der Absorbermodelle wird ein Absorberkennwertpaar vorhergesagt, unter dessen Zuhilfenahme das Schallfeld innerhalb und außerhalb des Absorbers eindeutig beschreibbar ist. Zur Optimierung des Absorbermaterials, z.B. Struktur etc., auf der Grundlage des Verständnisses der physikalischen Funktionsmechanismen sind Absorbermodelle unabdingbar. Soll dagegen das bereits hergestellte Material optimal zum Einsatz kommen, wäre es wünschenswert, die Optimierung des Absorberaufbaus anhand der Absorberkennwerten des Materials vorzunehmen. Im folgenden soll daher ein Verfahren vorgestellt werden, welches die messtechnische Bestimmung von Absorberkennwerten erlaubt.

II. GRUNDLAGEN

1. *Infinites verlustbehaftetes Fluid*

Das Schallfeld der ebenen Welle im verlustbehafteten Fluid lässt sich eindeutig mit Hilfe eines Kennwertpaares komplexwertiger Größen beschreiben. Für die Definition dieses Paares werden in der Literatur unterschiedliche Größen verwendet. In dieses Arbeit soll zur Definition des Kennwertpaares die Kennimpedanz der Schallwelle $\underline{Z}_A$ und der Wellenzahl $\underline{k}_A$ herangezogen werden. Dabei ist anzumerken, dass diese Größen anhand der Eigenschaften des Fluids berechenbar sind.

Das Schallfeld der homogenen ebenen Welle ist nicht durch geometrische Divergenz gekennzeichnet. Eine Abhängigkeit der Amplitude vom Abstand kann nur im verlustbehafteten Fluid beobachtet werden. Zur Beschreibung der Schallausbreitung einer homogenen ebenen Welle in einem verlustbehafteten Fluid ist die Wellenzahl $\underline{k}_A$ daher komplexwertig zu wählen:

$$\underline{k}_A = k_A^{'} + jk_A^{''} = \omega\left(\frac{1}{c_A^{'}} + j\frac{1}{c_A^{''}}\right). \qquad (1)$$

Dabei ist $\underline{c_A}$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Fluid. Für die Kreisfrequenz gilt $\omega = 2\pi f$.

Wichtig für die Definition von $\underline{k}_A$ ist die Festlegung der Zeitabhängigkeit. Sie sei an dieser Stelle mit $+j\omega t$ festgelegt und soll zum Erzielen einer besseren Übersichtlichkeit im folgenden vorausgesetzt, jedoch nicht gezeigt werden. Für $\underline{k}_A$ gilt somit:

$$k_A^{'} > 0 \qquad k_A^{''} < 0. \qquad (2)$$

Die Kennimpedanz der Schallwelle $\underline{Z}_A$ ist als Verhältnis zwischen den komplexwertigen Größen Schalldruck $\underline{p}$

und Schallschnelle $\underline{\vec{v}}$ definiert

$$\underline{Z}_A = \frac{\underline{p}}{\underline{\vec{v}}} \tag{3}$$

Da es sich bei der Schallschnelle um eine vektorielle Größe handelt, welche im Nenner auftritt, ist Kennimpedanz im mathematischen Sinne nicht definiert. Zur Berechnung der Kennimpedanz wird daher der Schalldruck auf die Schallschnelle in Ausbreitungsrichtung bezogen.

2. *Semi-infinites verlustbehaftetes Fluid*

Semi-infinite Fluide sind in ihrem Ausmaß in einer Raumdimension begrenzt. Es ist daher davon auszugehen, dass am Rande eines solchen Fluids eine Grenzfläche S existieren kann, die nicht senkrecht zur Schallausbreitungsrichtung angeordnet ist.

Zur Beschreibung der Wellenzahl $\underline{k}_A$ werden daher die Komponenten $\underline{k}_{A_x}, \underline{k}_{A_y}$ und $\underline{k}_{A_z}$ des Wellenzahl-Vektoren $\vec{\underline{k}_A}$ eingeführt [2]. Der Reflexionsfaktor $\underline{R}_p$ für ebene Wellen einer Grenzfläche S zweier Fluide berechnet sich mit Hilfe dieses Vektors mit

$$\begin{aligned}\underline{R}_p(\vartheta_0) &= \frac{\underline{Z}_w - Z_0/\cos(\vartheta_0)}{\underline{Z}_w + Z_0/\cos(\vartheta_0)} \\ &= \frac{\underline{Z}_1/Z_0\,\underline{n}_1\cos(\vartheta_0) - \sqrt{\underline{n}_1^2 - \sin^2\vartheta_0}}{\underline{Z}_1/Z_0\,\underline{n}_1\cos(\vartheta_0) + \sqrt{\underline{n}_1^2 - \sin^2\vartheta_0}}.\end{aligned} \tag{4}$$

Dabei ist $\underline{Z}_w$ die Wandimpedanz der Grenzfläche S.

3. *Geschichtetes homogenes Fluid*

Für die Wandimpedanz $\underline{Z}_{w_i}$ einer beliebigen Schicht i gilt [2]:

$$\underline{Z}_{w_i} = \underline{Z}_i \frac{\underline{Z}_{w_{i+1}} + j\frac{\underline{Z}_i}{\cos\underline{\varphi}_i}\tan\underline{\varphi}_i}{\frac{\underline{Z}_i}{\cos\underline{\varphi}_i} + j\underline{Z}_{w_{i+1}}\tan\underline{\varphi}_i}. \tag{5}$$

In Bild 1 ist zum näheren Verständnis die gewählte Bezeichnungsweise dargestellt. Wobei $\underline{Z}_{w\,i+1}$ die Wandimpedanz der $(i+1)$-ten Schicht ist und $\underline{\varphi}_i$ mit $\underline{\varphi}_i = \underline{k}_{A\,i} d_{A_i} \cos\underline{\vartheta}_i$ eingeht. Diese Rekursionsformel ermöglicht die Darstellung einer Wandimpedanz $\underline{Z}_{w\,i}$ durch die Wandimpedanz der in Schallausbreitungsrichtung folgenden Grenzfläche $\underline{Z}_{w\,i+1}$. Die Wandimpedanz $\underline{Z}_{w_1}$ der in Bild 1 gezeigten Grenzfläche zwischen Luft und geschichtetem Absorber lässt sich folglich als Funktion von Wandimpedanzen $\underline{Z}_{w\,i}$ der nachfolgenden Grenzflächen berechnen. Mit

$$\underline{n}_i = \frac{\underline{k}_{A_i}}{\underline{k}_{A\,i-1}} \tag{6}$$

lässt sich die Wandimpedanz $\underline{Z}_{w_i}$ in Abhängigkeit vom Schalleinfallswinkel $\underline{\vartheta}_{i-1}$ und vom Brechungsindex $\underline{n}_i$ durch

$$\underline{Z}_{w_i} = \underline{Z}_{A\,i} \frac{\underline{Z}_{w_{i+1}}\sqrt{\underline{n}_i^2 - \sin^2\underline{\vartheta}_{i-1}} + j\underline{Z}_{A\,i}\underline{n}_i \tan\left(\underline{k}_{A\,i-1} d_i \sqrt{\underline{n}_i^2 - \sin^2\underline{\vartheta}_{i-1}}\right)}{\underline{Z}_{A\,i}\underline{n}_i + j\underline{Z}_{w_{i+1}}\sqrt{\underline{n}_i^2 - \sin\underline{\vartheta}_{i-1}}\tan\left(\underline{k}_{A\,i-1} d_i \sqrt{\underline{n}_i^2 - \sin^2\underline{\vartheta}_{i-1}}\right)} \tag{7}$$

darstellen.

Zur Beschreibung der Wandimpedanz $\underline{Z}_{w_i}$ einer Absorberschicht i vor einer als nahezu schallhart angenommen Grenzfläche zwischen den Schichten i und $i+1$ geht Gleichung (7) in

$$\underline{Z}_{w_i} = -j\underline{Z}_{A\,i}\cot\left(\underline{k}_{A\,i-1} d_i \sqrt{\underline{n}_i^2 - \sin^2\underline{\vartheta}_{i-1}}\right) \tag{8}$$

über. Diese sehr kurze Herleitung zeigt, dass sich das Schallfeld über einem geschichteten Absorber anhand der Absorberkennwerte $\underline{k}_A$ und $\underline{Z}_A$ der Schichten berechnen lässt. Die hier gezeigte Lösung gilt für ebene Wellen, die Kennwerte können jedoch auch zur Berechnung des Schallfeldes einer Kugelwelle herangezogen werden [2]. Darüberhinaus lässt sich mit Hilfe des Kennwertpaares das Schallfeld im ausgekleideten Kanal berechnen [4].

III. MESSVERFAHREN

Für Herleitung eines Verfahrens zur Bestimmung der Absorberkennwerte wurden verschiedene Methoden untersucht [3]. Grundsätzlich lassen sich diese Methoden anhand ihres Ansatzes in zwei Kategorien unterteilen. Die Methoden der einen Kategorie basieren einzig auf der Bestimmung der Wandimpedanz der Absorberprobe im klassischen „Kundtschen Rohr“. Den anderen liegt die Messung der Übertragungsfunktion der Absorberprobe im Rohr zugrunde.

Bei den Methoden der ersten Kategorie sind jeweils zwei Messungen durchzuführen. Dabei wird die Wandimpedanz zwischen den Messungen gezielt durch die Beeinflussung der Geometrie verändert. Zu den wichtigsten Methoden dieser Kategorie gehören die so genannte

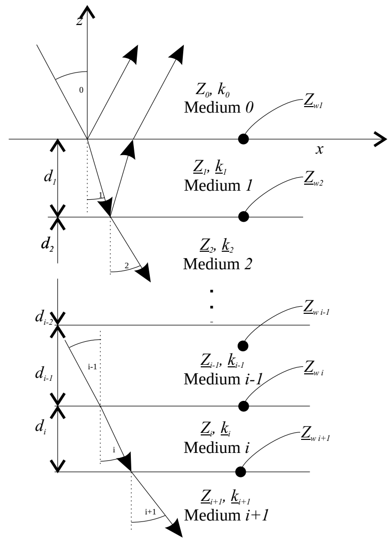

Bild 1: Schalleinfall ebener Wellen auf geschichtete homogene Absorbermedien.

„Zwei-Dicken-Methode“ sowie die „verbesserte Zwei-Hohlraum-Methode“. Bei der „Zwei-Dicken-Methode“ wird die Wandimpedanz anhand der Änderung der Absorberdicke beeinflusst. Die Berechnung der Kennwerte erfolgt nach Gleichung (8) anhand eines linearen Gleichungssystems. Die „verbesserte Zwei-Hohlraum-Methode“ verlangt die Messung der Wandimpedanz mit unterschiedlichen Wandabständen. Dabei wird der Wandimpedanz mit Gleichung (8) berechnet. Die Kennwerte werden auch bei dieser Methode anhand eines linearen Gleichungssystems bestimmt.

Den Ergebnissen der Untersuchung folgend zeichnen sich die Methoden der zweiten Kategorie gegenüber denen der ersten durch eine höhere Genauigkeit aus. Zu den wichtigsten drei Verfahren gehören die „Champoux-Stinson-Methode“, die „Iwase-Izume-Methode“ und die „Übertragungsmatrixmethode “.

Bei der Methode nach „Champoux-Stinson“ wird die Wandimpedanz sowie die akustische Übertragungsfunktion des Prüflings gemessen. Der Prüfling befindet sich dabei in einem festgelegten Abstand zur schallharten Rückwand. Die „Iwase-Izume-Methode“ basiert auf einer ähnlichen Grundidee. Hier wird jedoch im Gegensatz zu „Champoux-Stinson“ zwischen der Probe und dem schallharten Abschluss kein Luftspalt eingerichtet. Die akustische Übertragungsfunktion über der Probe wird anhand eines in der schallharten Rückwand eingelassenen und eines vor der Probe positionierten Mikrofones gemessen.

Von Song und Bolton wurde die „Übertragungsmatrixmethode“ eingeführt [5]. Mit Hilfe dieser Methode können die Kennwerte anhand nur einer Messung bestimmt werden. Dabei wird mit Hilfe von vier Mikrofonen die akustische Übertragungsfunktion des Prüflings bestimmt. Die Position der Mikrofone ist in Bild 2 gezeigt. Den Berechnungen der Kennwerte liegt das Schallfeldmodell der ebenen Welle zugrunde. Die Kopplung zwischen den Medien werden dabei nach Gleichung (7) berechnet. Für die Übertragungsmatrix gilt

$$\begin{pmatrix} \underline{T}_{11} & \underline{T}_{12} \\ \underline{T}_{21} & \underline{T}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \underline{k}_a d_A & j\underline{Z}_A \sin \underline{k}_A d_A \\ \frac{j}{\underline{Z}_A} \sin \underline{k}_A d_A & \cos \underline{k}_a d_A \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Die Kennwerte ergeben sich daher zu

$$\underline{k}_A = \frac{1}{d_A} \arccos\left(\underline{T}_{11}\right), \tag{10}$$

und

$$\underline{Z}_A = \left(\frac{\underline{T}_{12}}{\underline{T}_{21}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Die Elemente der Übertragungsmatrix lassen sich anhand der vier gemessene Schalldruckpegel bestimmen. Als Referenz sei dabei auf [3, 5] verwiesen.

Anhand der Bestimmung des Kennwertpaares der Luft (k_0, Z_0) wurde die Funktionsweise der Messanordnung zunächst getestet. Dazu wurde in das Rohr ein gezielter Querschnittssprung eingebracht. Der Reflexionsfaktor am Querschnittssprung lässt sich dabei aus dem Verhältnis der Querschnitte berechnen.

In Bild 3 ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_A und die Dämpfung $k_a^{''}$ der Hohlkugelstrukuren in Abhängigkeit von der Frequenz dargestellt. Wie erwartet kann für Strukturen mit größerem Kugeldurchmesser d_k eine höhere Schallgeschwindigkeit beobachtet werden. Diese Strukturen weisen im Vergleich zu Strukturen mit kleinem Kugeldurchmesser d_k erwartungsgemäß eine geringere Dämpfung $k_a^{''}$ auf. Weiterhin kann festgehalten werden, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Gegensatz zu herkömmlichen Absorbern im betrachteten Frequenzbereich von der Frequenz abhängig ist.

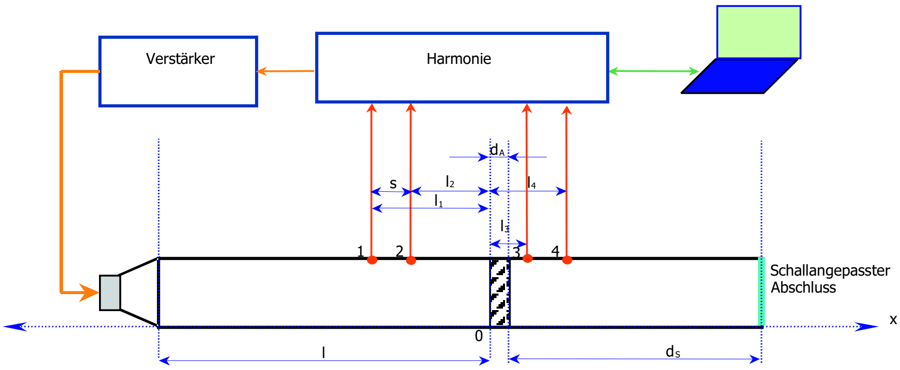

Bild 2: Versuchsaufbau.

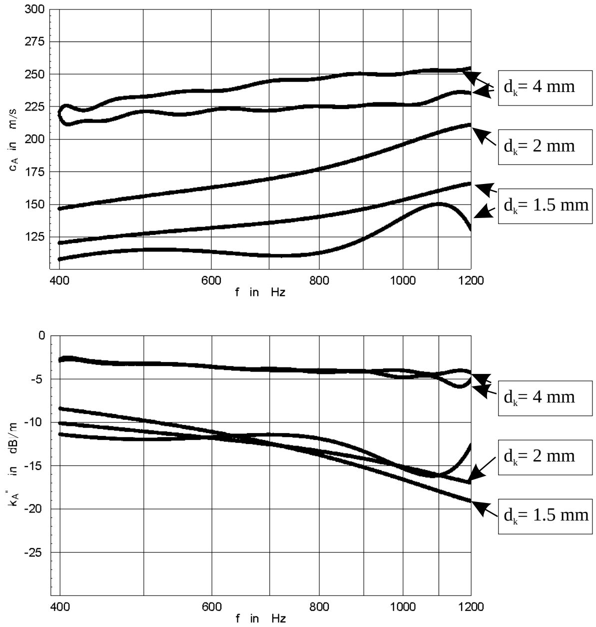

Bild 3: Ausbreitungsgeschwindigkeit c_A und Dämpfung $k_A^{''}$ innerhalb von Hohlkugelstrukturen als Funktion der Frequenz gemessen mit Hilfe der „Übertragungsmatrixmethode"; Parameter d_k Kugeldurchmesser.

IV. ZUSAMMENFASSUNG

Mit Hilfe der „Übertragungsmatrixmethode" ist es gelungen ein Messsystem aufzubauen, mit dem die Bestimmung der Absorberkennwerte $\underline{Z}_A$ und $\underline{k}_A$ sehr effizient erfolgen kann. Durch Referenzmessungen konnte die Funktionsweise der Messanordnung getestet werden. Dazu wurden Vergleichsrechnungen anhand von Absorbermodellen durchgeführt.

(Diese Arbeit wurde durch die Stiftung Industrieforschung, Marktstraße 8, 50968 Köln gefördert.)

[1] Allard, J. (1993). *Propagation of sound in porous media: modeling sound absorbing media*. Elsevier Applied Science.
[2] Brekhovskikh, L. M. (1980). *Waves in layered media*. Number ISBN 0-12-130560-0. New York [u.a.] : Acad. Press, 2. ed. edition.
[3] Elsaghir, E. (2003). Messverfahren zur bestimmung von absorberparametern. Master's thesis, Intitut für Akustik und Sprachkommunikation, TU Dresden, Germany.
[4] Mechel, F. (2002). *Formulas of acoustics*. Springer Verlag.
[5] Song, B. and Bolton, J. S. (2000). A transfer-matrix approach for estimating the characteristic impedance and wave numbers of limp and rigid porous materials. *Journal of the Acoustical Society of America*, 107(3):1131–1152.